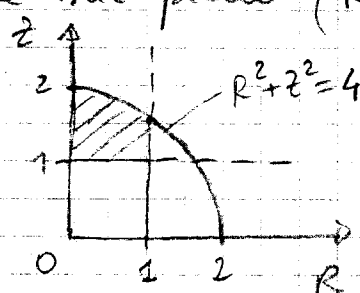


1) V è costituito dai punti interni alla sfera di centro l'origine e raggio 2, interni al cilindro con asse z e raggio 1, che hanno quote $z \geq 1$ e che stanno nel semispazio $y \geq 0$. Ponendo le coordinate cilindriche V corrisponde a

$$V' = \{ (R, \theta, z) \mid R^2 + z^2 \leq 4, R \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, z \geq 1 \}$$

la cui sezione nel piano (R, z) è data dalla figura



che è z -semplice.

Dunque

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{y}{z^3} dx dy dz &= \iiint_{V'} \frac{R \sin \theta}{z^3} \cdot R dR d\theta dz = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 R^2 dR \int_1^{\sqrt{4-R^2}} \frac{1}{z^3} dz \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 R^2 \left[\frac{-1}{2z^2} \right]_1^{\sqrt{4-R^2}} dR = \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \frac{1}{2} \int_0^1 R^2 \left(1 - \frac{1}{4-R^2} \right) dR = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \left(R^2 - \frac{R^2}{4-R^2} \right) dR = \int_0^1 \left(R^2 + \frac{4-R^2-4}{4-R^2} \right) dR = \int_0^1 \left(R^2 + 1 - \frac{4}{4-R^2} \right) dR = \\ &= \left[\frac{R^3}{3} + R \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4}{(2+R)(2-R)} dR = \frac{1}{3} + 1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2+R} + \frac{1}{2-R} \right) dR = \\ &\left(\text{infatti } \frac{4}{(2+R)(2-R)} = \frac{A}{2+R} + \frac{B}{2-R} = \frac{A(2-R) + B(2+R)}{(2+R)(2-R)} = \frac{(B-A)R + 2(A+B)}{(2+R)(2-R)} \right) \\ &\text{da cui } \begin{cases} B-A=0 \\ 2(A+B)=4 \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} A=B \\ A=1 \end{cases} \\ &= \frac{4}{3} - \left[\ln|2+R| - \ln|2-R| \right]_0^1 = \frac{4}{3} - \ln 3 \end{aligned}$$

2

1^a serie: $a_n = \frac{\ln^2(1 + \frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n^2}) + \frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, e termini positivi

Sce il numeratore che il denominatore sono infinitesimi.

• Per determinare l'ordine del numeratore, studiamo dapprima

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{(1/n)^\alpha} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t^\alpha} \stackrel{(H)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1/1+t}{\alpha t^{\alpha-1}} =$$
$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha(1+t)t^{\alpha-1}} = 1 \text{ per } \alpha = 1$$

Cio' prova che $\ln(1 + \frac{1}{n})$ è infinitesimo di ordine 1, e dunque il numeratore è infinitesimo di ordine 2

Studiamo l'ordine del denominatore:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/n^2) - \frac{1}{n}}{(1/n)^\alpha} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t^2 - t}{t^\alpha} \stackrel{(H)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \cos t - 1}{\alpha t^{\alpha-1}} \stackrel{0}{=} -1$$

se $\alpha = 1$. Cio' prova che il denominatore è infinitesimo di ordine 1

In definitiva a_n è infinitesimo di ordine $2-1=1$, e dunque la serie diverge per il criterio dell'ordine di infinitesimo.

2^a serie: $a_n = \frac{e^n}{2^{2n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Osserviamo che $a_n = \frac{2}{2} \cdot \frac{e^n}{2^{2n-1}} = 2 \frac{e^n}{2^{2n}} = 2 \cdot \left(\frac{e}{2^2}\right)^n$

perciò $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{2^{2n-1}} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^n$, che è serie geometrica

convergente e $2 \cdot \frac{1}{1 - e/4} = \frac{8}{4-e}$ poiché $|e/4| < 1$.